

OLIMPIADE NASIONAL MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PERGURUAN TINGGI 2017
(ONMIPA-PT)

BIDANG MATEMATIKA
23 MARET 2017
WAKTU: 60 MENIT

Analisis Kompleks

Petunjuk pengerjaan:

1. Tes ini terdiri dari dua bagian. Bagian Pertama terdiri dari 4 soal, sedangkan Bagian Kedua terdiri dari 2 soal.
2. Untuk soal-soal Bagian Pertama, tuliskan hanya jawaban akhir saja pada kotak yang disediakan. Jawaban yang dikehendaki adalah jawaban benar yang terbaik.
3. Untuk soal-soal Bagian Kedua, tuliskan jawaban Anda lengkap dengan argumentasi dan penjelasan.
4. Setiap soal pada Bagian Pertama bernilai 2 angka, sedangkan setiap soal pada Bagian Kedua bernilai 8 angka.
5. Waktu tes adalah waktu total untuk kedua bagian. Selama waktu itu, Anda boleh menyelesaikan soal yang mana pun sesuka Anda.
6. Gunakan pena atau pulpen. Pensil hanya boleh digunakan untuk gambar atau sketsa.
7. Jika tempat yang tersedia tidak mencukupi, gunakan halaman di belakangnya.
8. Bekerjalah dengan cepat, tetapi cermat dan teliti. Anda sama sekali tidak diperkenankan menggunakan penghapus cair.
9. Di akhir tes, kumpulkan berkas soal ini secara utuh.

Nama: _____

Univ./PT: _____

BAGIAN PERTAMA

1. Berapa banyak akar berbeda dari persamaan $z^{12} = 1$ yang bukan merupakan bilangan real?

2. Diketahui $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ adalah fungsi analitik dengan

$$f(z) = u(x) + iv(y)$$

untuk setiap bilangan kompleks $z = x + iy$. Jika $f(20) = 17$ dan $f(17) = 20$ maka nilai dari $f(2017)$ adalah...

3. Untuk sebarang bilangan kompleks a dan bilangan real positif r , didefinisikan

$$D_r^a = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}.$$

Jika fungsi

$$T(z) = \frac{z}{z + 1}$$

memenuhi

$$T^{-1}(D_r^0) = D_{2017r}^a$$

maka $a = \dots$

4. Misalkan f adalah suku banyak berderajat 2 yang memenuhi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = 0, \text{ dan } \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{z^2 f'(z)}{f(z)} dz = -2.$$

Jika $f(0) = 2017$ maka rumus eksplisit dari $f(z)$ adalah...

Nama: _____

Univ./PT: _____

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan λ bilangan kompleks yang memenuhi $\lambda^{2017} = 1$ dan $\lambda \neq 1$

(a). Buktikan bahwa $1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots, \lambda^{2016}$ semuanya berbeda.

(b). Hitung nilai dari

$$(1 + \lambda)(1 + \lambda^2)(1 + \lambda^3) \dots (1 + \lambda^{2016})$$

Nama: _____

Univ./PT: _____

2. Diberikan bilangan real positif M . Misalkan fungsi analitik $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ dengan $D = \{z : |z| \leq 1\}$ mempunyai bentuk deret

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

dan memenuhi $|f(z)| \leq M$ untuk setiap $z \in D$.

- (a). Untuk setiap $n \geq 1$ dan $0 < r < 1$, buktikan bahwa

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right|.$$

- (b). Dengan menggunakan (a) dan mengambil $r \rightarrow 1$, buktikan bahwa $|a_n| \leq M$ untuk setiap $n \geq 0$.