Olimpiade Nasional Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
PERGURUAN TINGGI 2017
(ONMIPA-PT)

Bidang Matematika
23 Maret 2017
Waktu: 60 menit

Struktur Aljabar

Petunjuk pengerjaan:

1. Tes ini terdiri dari dua bagian. Bagian Pertama terdiri dari 4 soal, sedangkan Bagian Kedua terdiri dari 2 soal.
2. Untuk soal-soal Bagian Pertama, tuliskan hanya jawaban akhir saja pada kotak yang disediakan. Jawaban yang dikehendaki adalah jawaban benar yang terbaik.
3. Untuk soal-soal Bagian Kedua, tuliskan jawaban Anda lengkap dengan argumentasi dan penjelasan.
4. Setiap soal pada Bagian Pertama bernilai 2 angka, sedangkan setiap soal pada Bagian Kedua bernilai 8 angka.
5. Waktu tes adalah waktu total untuk kedua bagian. Selama waktu itu, Anda boleh menyelesaikan soal yang mana pun sesuka Anda.
6. Gunakan pena atau pulpen. Pensil hanya boleh digunakan untuk gambar atau sketsa.
7. Jika tempat yang tersedia tidak mencukupi, gunakan halaman di belakangnya.
8. Bekerjalah dengan cepat, tetapi cermat dan teliti. Anda sama sekali tidak diperkenankan menggunakan penghapus cair.
9. Di akhir tes, kumpulkan berkas soal ini secara utuh.

Definisi dan Notasi

- *Orde* dari suatu unsur g di grup G adalah bilangan asli terkecil n sehingga $g^n = e$ dengan e unsur identitas di G.
- *Orde* dari grup adalah banyaknya unsur di grup.
- Polinom $f(x)$ di $F[x]$ dengan F lapangan disebut *tereduksi* jika terdapat $g(x), h(x)$ berderajat positif sehingga $f(x) = g(x)h(x)$.
- Suatu *unit* a adalah unsur di ring R sedemikian sehingga terdapat $b \in R$ sehingga $ab = 1 = ba$.
- Misalkan $f : R \to S$ merupakan homomorfisma ring. *Kernel* dari f adalah himpunan $\operatorname{Ker} f := \{r \in R : f(r) = 0\}$.
- Ideal I di R disebut *maksimal* jika tidak terdapat ideal lain J sehingga $I \subsetneqq J \subsetneqq R$.

Nama: ______________________________ Univ./PT: ___________

BAGIAN PERTAMA

1. Banyaknya unit di ring $\mathbb{Z}_{2^n}$ adalah ...

2. Misalkan S_5 adalah grup permutasi atas $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Banyaknya unsur berorde 2 di S_5 adalah ...

3. Banyaknya subgrup dari $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ berorde 4 adalah ...

4. Misalkan $\mathbb{F}_2$ adalah lapangan (*field*) dengan dua unsur. Semua polinom tereduksi berderajat 5 di $\mathbb{F}_2[x]$ yang tidak memiliki akar adalah ...

Nama: ______________________________ Univ./PT: ___________

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan H suatu subgrup normal hingga dari G. Misalkan pula $g \in G$ berorde n dan unsur di H yang komutatif dengan g hanyalah unsur identitas e.

   (a) Buktikan bahwa pemetaan $f : H \to H$ dengan $f(h) = g^{-1}h^{-1}gh$ merupakan suatu bijeksi.

   (b) Tunjukkan bahwa semua unsur di koset gH semuanya berorde n.

Nama: ______________________________ Univ./PT: ___________

2. Buktikan bahwa I merupakan ideal maksimal di gelanggang R jika dan hanya jika terdapat suatu lapangan (*field*) F dan homomorfisma ring $f : R \to F$ yang surjektif sedemikian sehingga $I = \mathrm{Ker} f$.