Olimpiade Nasional MIPA Perguruan Tinggi 2017

Bidang Matematika
Hari Kedua
16 Mei 2017
Waktu: 4 jam

Petunjuk pengerjaan:

1. Tes ini terdiri dari 5 soal, tuliskan jawaban Anda lengkap dengan argumentasi dan penjelasan.
2. Setiap soal bernilai 10 angka.
3. Anda boleh menyelesaikan soal yang mana pun sesuka Anda.
4. Tuliskan nomor tes Anda pada setiap lembar jawaban. Jangan tuliskan nama atau universitas asal Anda.
5. Gunakan pena atau pulpen. Pensil hanya boleh digunakan untuk gambar atau sketsa.
6. Jika tempat yang tersedia tidak mencukupi, gunakan halaman di belakangnya.
7. Bekerjalah dengan cermat dan teliti. Anda sama sekali tidak diperkenankan menggunakan penghapus cair.
8. Di akhir tes, kumpulkan berkas soal ini secara utuh.

1. Misalkan A dan B adalah matriks dalam $\mathbb{R}^{2017\times 2017}$ yang memenuhi persamaan-persamaan

$$A^{-1} = (A+B)^{-1} - B^{-1}$$

dan

$$det(A^{-1}) = 2017.$$

Tentukan $det(B)$.

2. Misalkan R suatu gelanggang yang memenuhi $x^2 = x$ untuk setiap x di R.

   (a) Tunjukkan bahwa R merupakan gelanggang komutatif.

   (b) Buktikan bahwa untuk setiap $x_1, x_2, \ldots, x_n$ di R, ideal $I := \langle x_1 \rangle + \langle x_2 \rangle + \cdots + \langle x_n \rangle$ dapat dituliskan sebagai $I = \langle x \rangle$ untuk suatu x di R.

3. Sebuah barisan $\{Y_n\}$ didefinisikan oleh $Y_1 = 2$ dan $Y_{n+1} = Y_n(Y_n - 1) + 1$, untuk $n \geq 1$. Buktikan bahwa bila $m \neq n$, maka pembagi sekutu terbesar dari Y_m dan Y_n adalah 1 dan

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{Y_i} = 1.$$

4. Diketahui fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinu dan surjektif. Jika untuk setiap $y \in \mathbb{R}$, cacah anggota himpunan $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}$ paling banyak dua, buktikan bahwa f monoton.

5. Misalkan $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ dan

$$f(z) = \frac{z^4 + 2017}{z^4 + z^3 + 1}.$$

(a). Buktikan bahwa untuk setiap $R > 2$ berlaku

$$\int_C f(z)dz = \int_{|z|=R} f(z)dz.$$

(b). Hitung $\int_C f(z)dz$.