Olimpiade Nasional MIPA Perguruan Tinggi 2017

Bidang Matematika
Hari Pertama
15 Mei 2017
Waktu: 4 jam

Petunjuk pengerjaan:

1. Tes ini terdiri dari 5 soal, tuliskan jawaban Anda lengkap dengan argumentasi dan penjelasan.
2. Setiap soal bernilai 10 angka.
3. Anda boleh menyelesaikan soal yang mana pun sesuka Anda.
4. Tuliskan nomor tes Anda pada setiap lembar jawaban. Jangan tuliskan nama atau universitas asal Anda.
5. Gunakan pena atau pulpen. Pensil hanya boleh digunakan untuk gambar atau sketsa.
6. Jika tempat yang tersedia tidak mencukupi, gunakan halaman di belakangnya.
7. Bekerjalah dengan cermat dan teliti. Anda sama sekali tidak diperkenankan menggunakan penghapus cair.
8. Di akhir tes, kumpulkan berkas soal ini secara utuh.

1. Untuk bilangan bulat k dan n dengan $0 \leq k \leq n$, buktikan bahwa

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

2. Misalkan A dan B adalah matriks dalam $\mathbb{R}^{n\times n}$ yang memenuhi persamaan

$$AB^2 - 2BAB + B^2A = 0.$$

Tentukan nilai eigen terbesar dari matriks $AB - BA$.

3. Misalkan a, b, dan c adalah bilangan-bilangan kompleks dengan sifat $abc = 1$ dan

$$\begin{cases} a^{20} + b^{20} + c^{20} = \frac{1}{a^{20}} + \frac{1}{b^{20}} + \frac{1}{c^{20}} \\ a^{17} + b^{17} + c^{17} = \frac{1}{a^{17}} + \frac{1}{b^{17}} + \frac{1}{c^{17}} \\ a^{2017} + b^{2017} + c^{2017} = \frac{1}{a^{2017}} + \frac{1}{b^{2017}} + \frac{1}{c^{2017}}. \end{cases}$$

Buktikan bahwa

$$1 \in \{a, b, c\}.$$

4. Jika fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mempunyai sifat: untuk setiap deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen berakibat deret $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ konvergen, buktikan bahwa terdapat $M > 0$ dan $\epsilon > 0$, dengan sifat untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, $0 < x < \epsilon$ berlaku
$$|f(x)| \leq Mx.$$

5. (a) Berikan contoh suatu bilangan prima ganjil p dan suatu grup G sehingga $|G| = p + 1$ dan p membagi $|\mathrm{Aut}(G)|$.

   (b) Misalkan p suatu bilangan prima ganjil dan G suatu grup dengan $|G| = p+1$. Buktikan bahwa jika p membagi $|\mathrm{Aut}(G)|$ maka $p = 4k + 3$ untuk suatu bilangan bulat k.