# Olimpiade Nasional Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

PERGURUAN TINGGI 2017

(ONMIPA-PT)

Bidang Matematika

22 Maret 2017

Waktu: 120 menit

## Analisis Real

**Petunjuk pengerjaan:**

1. Tes ini terdiri dari dua bagian. Bagian Pertama terdiri dari 8 soal, sedangkan Bagian Kedua terdiri dari 3 soal.
2. Untuk soal-soal Bagian Pertama, tuliskan hanya jawaban akhir saja pada kotak yang disediakan. Jawaban yang dikehendaki adalah jawaban benar yang terbaik.
3. Untuk soal-soal Bagian Kedua, tuliskan jawaban Anda lengkap dengan argumentasi dan penjelasan.
4. Setiap soal pada Bagian Pertama bernilai 2 angka, sedangkan setiap soal pada Bagian Kedua bernilai 8 angka.
5. Waktu tes adalah waktu total untuk kedua bagian. Selama waktu itu, Anda boleh menyelesaikan soal yang mana pun sesuka Anda.
6. Gunakan pena atau pulpen. Pensil hanya boleh digunakan untuk gambar atau sketsa.
7. Jika tempat yang tersedia tidak mencukupi, gunakan halaman di belakangnya.
8. Bekerjalah dengan cepat, tetapi cermat dan teliti. Anda sama sekali tidak diperkenankan menggunakan penghapus cair.
9. Di akhir tes, kumpulkan berkas soal ini secara utuh.

Nama: ______________________ Univ./PT: __________

## BAGIAN PERTAMA

1. Diberikan fungsi tak nol $f : D \to \mathbb{R}$ dan fungsi $g : D \to \mathbb{R}$ dengan $D \subseteq \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\dfrac{g(x)}{f(x)} \leq 1$, $\forall x \in D$, berilah contoh fungsi $f$ dan $g$ yang menunjukkan bahwa belum tentu berlaku $\sup\limits_{x\in D} g(x) \leq \inf\limits_{x\in D} f(x)$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[ \left(\dfrac{1}{n}\right)^n + \left(\dfrac{2}{n}\right)^n + \ldots + \left(\dfrac{n}{n}\right)^n \right] = \ldots\ldots\ldots\ldots$

3. Jika barisan bilangan real positif $(a_n)$ memenuhi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, maka

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \left( \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k} \right)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4. Deret fungsi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-x)^{k+1}}{k}$ konvergen ke ....... dengan interval konvergensi ...........

5. Diketahui fungsi $f$ terintegral pada $[a, b]$ dan

$$S = \{x \in (a, b) : f \text{ kontinu di } x\}.$$

Jika $p \in S$ dan $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\ dx = 0$, maka $p^2 + f^2(p) = \ldots\ldots$

6. Diketahui fungsi $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ kontinu dan $f'(x)$ ada untuk setiap $x \in (0, 1)$. Jika untuk setiap $x \in (0, 1)$ berlaku $0 \leq f'(x) \leq 2f(x)$, maka rumus $f$ pada $[0, 1]$ adalah $f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

7. Diketahui fungsi $f : [a, b] \to [a, b]$ kontinu dan naik. Jika $f(a) = a$ dan $E = \{x \in [a, b] : f(x) \geq x\}$, maka $f(E) = \ldots\ldots\ldots$

8. Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dengan $f(x) = 1 + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Jika $|f(x) - 1| = 2 \sin 2x$, maka nilai $|a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Nama: ______________________________ Univ./PT: ___________

## BAGIAN KEDUA

1. Diketahui fungsi $f$ mempunyai turunan hingga tingkat ke-2 pada $[0, 1]$ dan fungsi $g$ didefinisikan dengan $g(x) = f(x) + f(1-x)$. Jika $f''(x) > 0$, untuk setiap $x \in [0, 1]$, buktikan bahwa $g$ turun pada $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Nama: ______________________________ Univ./PT: ___________

2. Diketahui fungsi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ terdiferensial dan tidak ada $x$ dengan

$$f(x) = f'(x) = 0.$$

Tunjukkan bahwa himpunan $\{x \in [0,1] : f(x) = 0\}$ berhingga.

Nama: ______________________________ Univ./PT: ___________

3. Diketahui fungsi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mempunyai turunan hingga tingkat ke-2 pada $(0,1)$. Jika $f(0) = f(1) = 0$ dan $f'' + 2f' + f \geq 0$ pada $(0,1)$, buktikan bahwa $f(x) \leq 0$, untuk setiap $x \in [0,1]$.