

OLIMPIADE NASIONAL MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
PERGURUAN TINGGI 2017
(ONMIPA-PT)

BIDANG MATEMATIKA

23 MARET 2017

WAKTU: 120 MENIT

Aljabar Linier

Petunjuk pengerjaan:

1. Tes ini terdiri dari dua bagian. Bagian Pertama terdiri dari 8 soal, sedangkan Bagian Kedua terdiri dari 3 soal.
2. Untuk soal-soal Bagian Pertama, tuliskan hanya jawaban akhir saja pada kotak yang disediakan. Jawaban yang dikehendaki adalah jawaban benar yang terbaik.
3. Untuk soal-soal Bagian Kedua, tuliskan jawaban Anda lengkap dengan argumentasi dan penjelasan.
4. Setiap soal pada Bagian Pertama bernilai 2 angka, sedangkan setiap soal pada Bagian Kedua bernilai 8 angka.
5. Waktu tes adalah waktu total untuk kedua bagian. Selama waktu itu, Anda boleh menyelesaikan soal yang mana pun sesuka Anda.
6. Gunakan pena atau pulpen. Pensil hanya boleh digunakan untuk gambar atau sketsa.
7. Jika tempat yang tersedia tidak mencukupi, gunakan halaman di belakangnya.
8. Bekerjalah dengan cepat, tetapi cermat dan teliti. Anda sama sekali tidak diperkenankan menggunakan penghapus cair.
9. Di akhir tes, kumpulkan berkas soal ini secara utuh.

Definisi dan notasi:

$\mathbb{R}^{k \times m}$: himpunan semua matriks real berukuran $k \times m$

P_k : ruang polinom real berderajat paling tinggi k

$tr(\mathbf{A})$: trace matriks \mathbf{A}

$\text{Inti}(T)$: himpunan $\{\mathbf{v} \in U \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$ jika U, V ruang vektor dan $T : U \rightarrow V$ linier

f' : Turunan fungsi f

$\dim(U)$: dimensi ruang vektor U

Nama: _____

Univ./PT: _____

BAGIAN PERTAMA

1. Misalkan K dan L dua subruang berbeda dari ruang vektor real V . Jika $\dim(K) = \dim(L) = 4$, maka dimensi minimal yang mungkin untuk V adalah

2. Misalkan P_2 adalah ruang polinom real berderajat paling tinggi 2. Koordinat x^2 terhadap basis $\{x^2 + x, x + 1, x^2 + 1\}$ di P_2 adalah

3. Subruang U dan W dari ruang vektor \mathbb{R}^5 masing masing dibangun oleh $\{(1, 3, -2, 2, 3), (1, 4, -3, 4, 2), (2, 3, -1, -2, 9)\}$ dan $\{(1, 3, 0, 2, 1), (1, 5, -6, 6, 3), (2, 5, 3, 2, 1)\}$. Salah satu basis dari subruang $U \cap W$ adalah

4. Dengan hasil kali dalam $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$, $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix} \right\}$ adalah himpunan ortogonal jika dan hanya jika $a = \dots$

5. Inti transformasi linier $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dibangun oleh $\{(1, 2, 3, 4), (0, 1, 1, 1)\}$. Jika $T(a, b, c, d) = (a + b - c, x, 0)$, maka $x = \dots$

6. Misalkan $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Misalkan T operator linier pada $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ dengan aturan $T(X) = AX - XA, \forall X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Maka $\text{rank}(T) = \dots$

7. Matriks $\begin{bmatrix} w & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ memiliki dua nilai eigen yang sama jika dan hanya jika $w \in S$. Maka $S = \dots$

8. Misalkan V ruang vektor fungsi-fungsi $ae^{3x} \sin x + be^{3x} \cos x$. Transformasi $T : V \rightarrow V$ didefinisikan $T(f) = f' + f$ untuk setiap $f \in V$. Matriks representasi T terhadap basis $\{e^{3x} \sin x, e^{3x} \cos x\}$ adalah

Nama: _____

Univ./PT: _____

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan A, B, C, D matriks-matriks berukuran $n \times n$. Misalkan pula A memiliki balikan dan $AC = CA$. Buktikan bahwa

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - CB).$$

Nama: _____

Univ./PT: _____

2. Misalkan $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ dan $A = (a_{ij})$ adalah matriks $n \times n$ dengan $a_{ij} = v_i v_j$. Jika $\text{rank}(A) = 1$, tentukanlah nilai k yang memenuhi

$$(I + A)^{-1} = I - \frac{1}{k}A.$$

Nama: _____

Univ./PT: _____

3. Misalkan $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{v} \end{bmatrix}$ dan $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{v}\}$.
Tentukan $\min\{\|\mathbf{x}\|_2 \mid \mathbf{x} \in K\}$.